Concursul interjudeţean de matematică "Alexandru Papiu Ilarian"
Ediţia a XIII-a, Târgu-Mureş, 2008
Clasa a IX-a

1. Fie ABC un triunghi dreptunghic cu lungimile laturilor numere naturale (triunghi pitagoric).

Să se arate că:

a) Raza cercului înscris în triunghi este un număr natural.

b) Aria triunghiului este un număr natural divizibil cu 6.

2. Fie x, y numere naturale.

a) Să se arate că numerele $x^2 + 2y$ şi $y^2 + 2x$ nu sunt ambele pătrate perfecte.

b) Să se determine perechile (x, y) pentru care numerele x^3+3y^2+3x+1 şi y^3+3x^2+3y+1

sunt ambele cuburi perfecte.

3. Fie A_1, B_1, C_1 trei puncte pe laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC. Notăm cu A_2, B_2, C_2 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor AB_1C_1, BC_1A_1 şi CA_1B_1. Să se arate că triunghiurile ABC şi $A_2B_2C_2$ sunt asemenea.

4. Determinaţi cel mai mare număr de numere naturale din mulţimea $M = \{1, 2, \ldots, 2008\}$ cu proprietatea că suma oricăror două numere alese se divide cu 10.

Problema 1 Clasa a IX-a

Fie ABC un triunghi dreptunghic cu laturile de lungimi numere naturale (triunghi Pitagoric).

Să se arate că:

a) Raza cercului înscris în triunghi este număr natural.

b) Aria triunghiului este un număr natural divizibil cu 6.

Maria Pop

Soluţie. a) Fie I centrul cercului înscris în triunghi şi descompunem triunghiul în ariile IAB, IBC, ICA. Se obţine relaţia

$$S = \frac{a \cdot r + b \cdot r + c \cdot r}{2} \quad \text{sau} \quad r = \frac{2S}{a+b+c}.$$

Dacă $a^2 = b^2 + c^2$ atunci există $m, n \in \mathbb{N}$ astfel ca:

$$a = m^2 + n^2, \quad b = m^2 - n^2, \quad c = 2mn, \quad m > n$$

şi atunci

$$r = \frac{bc}{a+b+c} = \frac{2mn(m^2-n^2)}{2m^2+2mn} = \frac{mn(m-n)(m+n)}{m(m+n)} = n(m-n) \in \mathbb{N}.$$

b) $S = \dfrac{bc}{2} = mn(m^2 - n^2) = mn(m-n)(m+n)$

Dacă m sau n sunt pare atunci $S \vdots 2$.

Dacă m şi n sunt impare, atunci $m - n$ şi $m + n$ sunt pare deci $S \vdots 2$.

Dacă m sau n sunt divizibile cu 3 atunci $S \vdots 3$.

Dacă $m = n = 1$ sau $m = n = 2 \pmod 3$ atunci $(m - n) \vdots 3 \ \Rightarrow \ S \vdots 3$.

Dacă $m = 1$ şi $n = 2$ sau $m = 2$ şi $n = 1 \pmod 3$ atunci $(m + n) \vdots 3 \ \Rightarrow \ S \vdots 3$.

În concluzie în toate cazurile $S \vdots 2$ şi $S \vdots 3 \ \Rightarrow \ S \vdots 6$.

Problema 2 Clasa a IX-a

Fie x, y numere naturale nenule.

a) Să se arate că numerele $x^2 + 2y$ şi $y^2 + 2x$ nu sunt ambele pătrate perfecte.

b) Să se determine perechile (x, y) pentru care numerele $x^3 + 3y^2 + 3x + 1$ şi $y^3 + 3x^2 + 3y + 1$ sunt ambele cuburi perfecte.

Maria Pop

Soluţie. a) $x^2 + 2y > x^2$. Cel mai mic pătrat perfect mai mare ca x^2 este $(x+1)^2$ din $x^2 + 2y \geq (x+1)^2 \;\Leftrightarrow\; 2y \geq 2x + 1 \;\Rightarrow\; y > x$. Analog obţinem $x > y$, contradicţie, deci ipoteza că ambele ar fi pătrate perfecte este falsă.

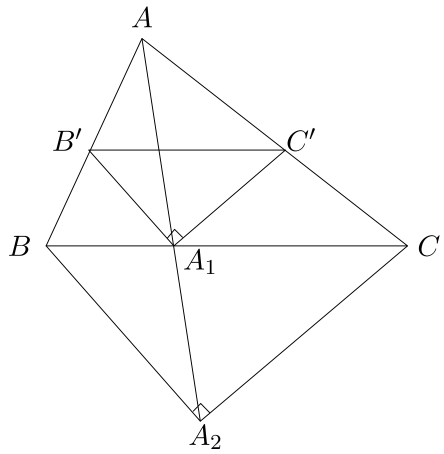
b) $x^3 + 3y^2 + 3x + 1 \geq (x+1)^3 \;\Leftrightarrow\; 3y^2 \geq 3x^2 \;\Leftrightarrow\; y^2 \geq x^2$ şi analog $x^2 \geq y^2$ deci $x = y$ şi singurele perechi sunt (x, x), $x \in \mathbb{N}^*$.

Problema 3 Clasa a IX-a

Pe laturile AB, AC, BC ale triunghiului ascuţitunghic ABC se consideră punctele B', C' şi A_1 astfel ca triunghiul $B'A_1C'$ să fie dreptunghic isoscel şi ipotenuza $B'C'$ să fie paralelă cu BC. Analog se definesc punctele $B_1 \in AC$ şi $C_1 \in AB$. Să se arate că dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente.

Vasile Pop

Soluţie.



Construim pe latura BC triunghiul dreptunghic isoscel BA_2C, cu BC ipotenuză şi notăm cu $A_1 = AA_2 \cap BC$. Din A_1 ducem $A_1C' \| A_2C$ cu $C' \in AC$ şi $A_1B' \| A_2B$ cu $B' \in AB$. Triunghiul $B'A_1C'$ este dreptunghic şi isoscel, deci punctele B', A_1, C' sunt cele definite în problemă. Evaluăm raportul

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{\mathcal{A}(ABA_2)}{\mathcal{A}(ACA_2)} = \frac{AB \cdot BA_2 \cdot \sin\left(B + \frac{\pi}{4}\right)}{AC \cdot CA_2 \cdot \sin\left(C + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{AB \cdot \sin\left(B + \frac{\pi}{4}\right)}{AC \cdot \sin\left(C + \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Analog deducem:

$$\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{BC \cdot \sin\left(C + \frac{\pi}{4}\right)}{BA \cdot \sin\left(A + \frac{\pi}{4}\right)} \quad \text{şi} \quad \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{CA \cdot \sin\left(A + \frac{\pi}{4}\right)}{CB \cdot \sin\left(B + \frac{\pi}{4}\right)}$$

Avem:

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1$$

şi conform teoremei lui Ceva, dreptele AA_1, BB_1 şi CC_1 sunt concurente.

Problema 4 Clasa a IX-a

Determinaţi cel mai mare număr de numere naturale pe care le putem alege din mulţimea $M = \{1, 2, 3, \ldots, 2008\}$ astfel ca suma oricăror două numere alese să se dividă cu 10.

Maria Pop

Soluţie. Să notăm cu A mulţimea aleasă şi fixăm un element $n_1 \in A$. Pentru alte două elemente $n_2 \in A$ şi $n_3 \in A$ avem: $(n_1 + n_2) \vdots 10$ şi $(n_1 + n_3) \vdots 10$, deci n_2 şi n_3 au aceeaşi ultimă cifră. Apoi $(n_2 + n_1) \vdots 10$, $(n_2 + n_3) \vdots 10$ deci n_1 şi n_3 au aceeaşi ultimă cifră. În concluzie toate numerele din A au aceeaşi ultimă cifră, fie ea $c \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Din $(n_1 + n_2) \vdots 10$ rezultă $(c + c) \vdots 10$ deci c este 0 sau 5. În M avem 200 de numere ce au ultima cifră 0 şi 201 numere care au ultima cifră 5. Numărul căutat este 201 (iar mulţimea care realizează maximul este $\{5, 15, 25, 35, \ldots, 2005\}$.

Concursul interjudeţean de matematică ”Alexandru Papiu Ilarian”
Ediţia a XIII-a, Târgu-Mureş, 2008
Clasa a X-a

1. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică ecuaţia funcţională:

$$f(x^3 + y) = f(x) + f(y^3), \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R} \text{ şi } y \in \mathbb{R}.$$

2. Să se arate că dacă $a, b, c \in [0, 1]$ atunci:

$$\frac{a}{1 + b \cdot c} + \frac{b}{1 + c \cdot a} + \frac{c}{1 + a \cdot b} + a \cdot b \cdot c \leq \frac{5}{2}$$

3. Pe laturile AB, AC şi BC ale triunghiului ascuţitunghic ABC se consideră punctele M, N şi A_1 astfel ca triunghiul MA_1C să fie dreptunghic, isoscel cu ipotenuza MN paralelă cu BC. Analog se definesc punctele B_1 pe AC şi C_1 pe AB.

Să se arate că dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente.

4. Fie (d) o dreaptă şi $M \subset (d)$ o mulţime nevidă de puncte care admite două puncte de simetrie: $A, B \in (d)$.

a) Să se arate că mulţimea M este infinită.

b) Să se arate că există o diviziune echidistantă a dreptei (d) pentru care fiecare nod este un punct de simetrie pentru mulţimea M.

Problema 1 Clasa a X-a

Să se determine funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică ecuaţia funcţională

$$f(x^3 + y) = f(x) + f(y^3),\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R}.$$

Maria Pop

Soluţie. Pentru $x = y = 0$ rezultă $f(0) = 0$.
Pentru $y = 0$ rezultă $f(x^3) = f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
Din ecuaţia $f(x^3 + y) = f(x^3) + f(y) \ \Leftrightarrow\ f(u + v) = f(u) + f(v)$, $\forall\, u, v \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} f(x + y) = f(x) + f(y),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R} \\ f(x^3) = f(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Se obţine $f(nx) = nf(x)$, $\forall\, x$

$$f((2x)^3) = f(2x) \ \Leftrightarrow\ f(8x^3) = f(2x) \ \Leftrightarrow\ 8f(x^3) = 2f(x) \ \Leftrightarrow$$

$$8f(x) = 2f(x) \ \Leftrightarrow\ 6f(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ f(x) = 0,\ \forall\, x$$

deci $f = 0$.

Problema 2 Clasa a X-a

Să se arate că dacă $a, b, c \in [0,1]$ atunci:

$$\frac{a}{1+b\cdot c}+\frac{b}{1+c\cdot a}+\frac{c}{1+a\cdot b}+a\cdot b\cdot c\leq\frac{5}{2}$$

Vasile Pop

Soluţie.
$\sum\frac{a}{1+b\cdot c}\leq\sum\frac{a}{1+a\cdot b\cdot c}=\frac{a+b+c}{1+a\cdot b\cdot c}$

Avem de arătat că $\frac{a+b+c}{a+a\cdot b\cdot c}+a\cdot b\cdot c\leq\frac{5}{2}$.

Avem: $\frac{a+b+c}{1+a\cdot b\cdot c}+a\cdot b\cdot c=\frac{a+b+c+a\cdot b\cdot c(1+a\cdot b\cdot c)}{1+a\cdot b\cdot c}\leq\frac{a+b+c+2a\cdot b\cdot c}{1+a\cdot b\cdot c}$

Vom arăta că $\frac{a+b+c+2a\cdot b\cdot c}{1+a\cdot b\cdot c}\leq\frac{5}{2}\Longleftrightarrow 2s+4p\leq 5+5p\Longleftrightarrow 2s-p\leq 5\Longleftrightarrow s-\frac{1}{2}p\leq\frac{5}{2}$.

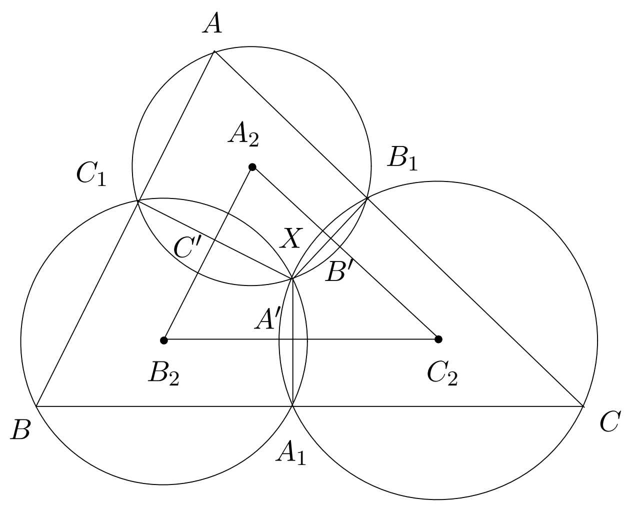
Dar: $s-\frac{1}{2}p=a+b+c-\frac{1}{2}abc=a+b+c(1-\frac{1}{2}ab)\leq a+b+1-\frac{1}{2}ab=$
$a+b(1-\frac{1}{2}a)+1\leq a+1-\frac{1}{2}a+1=2+\frac{1}{2}a\leq\frac{5}{2}$.

Problema 3 Clasa a X-a

Fie A_1, B_1, C_1 trei puncte pe laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC. Notăm cu A_2, B_2, C_2 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor AB_1C_1, BC_1A_1 şi CA_1B_1. Să se arate că triunghiurile ABC şi $A_2B_2C_2$ sunt asemenea.

Vasile Pop

Soluţie.



Fie X intersecţia cercurilor cu centrele B_2 şi C_2, $(X \neq A_1)$

$$\Rightarrow \ \widehat{C_1XA_1} = 180^\circ - \widehat{B},$$

$$\widehat{B_1XA_1} = 190^\circ - \widehat{C} \ \Rightarrow \ \widehat{C_1XB_1} = 360^\circ - (180^\circ - \widehat{B_1}) - (180^\circ - \widehat{C})$$
$$= \widehat{B} + \widehat{C} = 190 - \widehat{A} \ \Rightarrow \ X$$

este pe cercul circumscris triunghiului AC_1B_1 (cele trei cercuri sunt concurente).

Fie $A' = XA_1 \cap B_2C_2$ şi B', C' analoagele $\Rightarrow$ $XA_1 \perp B_2C_2$ (coarda comună $\perp$ linia centrelor) $\Rightarrow$ patrulaterele $B_2A'XC'$, $A'C_2B'X$, $B'A_2C'X$ inscriptibile $\Rightarrow$

$$C'A_2B' = 180^\circ - C_1XB_1 = 180^\circ - (180^\circ - \widehat{A}) = \widehat{A}$$

(din AC_1XB_1 inscriptibil) $\Rightarrow$ analog $\widehat{B_2} = \widehat{B}$, $\widehat{C_2} = \widehat{C}$.

Problema 4 Clasa a X-a

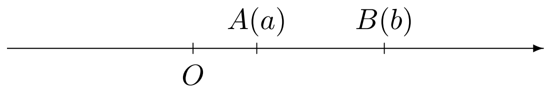
Fie (d) o dreaptă şi $M \subset (d)$ o mulţime nevidă de puncte care admite două puncte de simetrie: $A, B \in (d)$.

a) Să se arate că mulţimea M este infinită.

b) Să se arate că există o diviziune echidistantă a dreptei (d) pentru care fiecare nod este un punct de simetrie pentru mulţimea M.

Vasile Pop

Soluţie. Alegem pe (d) o unitate de măsură şi un sens $((d) = \mathbb{R})$ şi fie $A(a)$, $B(b)$ punctele de simetrie.

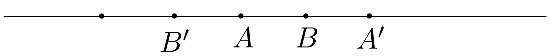


Pentru orice punct arbitrar $X = X_1 \in M$ simetricul lui faţă de A este $C(x_2)$ cu $x_2 + x_1 = 2a \Rightarrow x_2 = 2a - x_1 \in M$. Simetricul lui C faţă de B este $D(x_3)$ cu $x_3 + x_2 = 2b \Rightarrow x_3 = 2b - 2a + x_1 \in M$.

Simetricul lui D faţă de A este $E(x_4)$ cu $x_4 + x_3 = 2a \Rightarrow x_4 = 2a - 2b + 2a - x_1 \in M$. Observăm că $x_1 + x_4 = 2(2a - b)$, deci punctele x_1 şi x_4 sunt simetrice faţă de punctul $A'(2a - b)$. Deoarece $x_1 \in M$ a fost ales arbitrar rezultă că punctul A' este şi el punct de simetrie pentru mulţimea M. Putem presupune $a > b$ (dacă nu schimbăm notaţiile) şi din cele spuse mai sus reţinem:

a) Dacă $x_1 \in M$ atunci $x_3 = 2(b - a) + x_1 \in M$ şi $x_3 < x_1$. Apoi $x_3 \in M \Rightarrow x_5 = 2(b - a) + x_3 = 4(b - a) + x_1 \in M$ şi $x_5 < x_3$. Analog obţinem un şir (descrescător) de puncte distincte din M.

b) Punctul $A'(2a - b)$ este şi el punct de simetrie şi observăm că A' este simetricul lui B faţă de A $(b + 2a - b = 2a)$. Am obţinut că simetricul lui A faţă de B şi simetricul lui B faţă de A sunt şi ele puncte de simetrie.



Analog simetricul lui B faţă de A' şi simetricul lui A faţă de B' sunt puncte de simetrie. Astfel generăm o diviziune echidistantă a dreptei (d) formată din puncte de simetrie pentru M.

Concursul interjudeţean de matematică "Alexandru Papiu Ilarian"
Ediţia a XIII-a, Târgu-Mureş, 2008
Clasa a XI-a

1. a) Să se arate că dacă şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifică relaţia de recurenţă

$$x_{n+1} = -x_n + 6x_{n-1},\ \forall\ n \geq 1,$$

atunci există $A, B \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$x_n = A \cdot 2^n + B \cdot (-3)^n,\ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

b) Să se determine funcţiile $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ care verifică relaţia

$$f(f(x) - x) = 6x,\ \forall\ x \in (0, \infty).$$

2. Pentru $a > 0$ definim şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ prin relaţia de recurenţă:

$$x_{n+1} = a + ax_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} + (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n+1})^2,\ \forall\ n \geq 2,$$

cu $x_1 = 1$ şi $x_2 = 1 + a$.

a) Să se arate că şirul verifică relaţiile de recurenţă P_n şi Q_n:

$$P_n : \quad x_n = a + x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1},\ \forall\ n \geq 2$$

$$Q_n : \quad x_{n+1} = x_n^2 - ax_n + a,\ \forall\ n \geq .$$

b) Să se arate că

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{x_k} < a(a+1),\ \forall\ n \geq 2.$$

3. Fie n un număr natural nenul şi $a > 1$ un număr real cu proprietatea $a^k \notin \mathbb{N}$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ şi notăm $m = [a^n]$. Să se arate că:

$$\sum_{k=1}^{n} [a^k] + \sum_{k=1}^{m} [\log_a k] = m \cdot n.$$

4. Două din cele $(2n+1)^2$ pătrate ale unui foi de dimensiuni $(2n+1) \times (2n+1)$ se colorează cu roşu, celelalte rămân albe. Câte colorări distincte se pot face dacă colorările ce devin identice prin rotaţii ale foii se numără o singură dată?

Problema 1 Clasa a X-a

a) Să se arate că dacă şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifică relaţia de recurenţă

$$x_{n+1} = -x_n + 6x_{n-1},\ \forall\ n \geq 1,$$

atunci există $A, B \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$x_n = A \cdot 2^n + B \cdot (-3)^n,\ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

b) Să se determine funcţiile $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ care verifică relaţia

$$f(f(x) - x) = 6x,\ \forall\ x \in (0, \infty).$$

Vasile Pop

Soluţie. a) Pentru $n = 0$ şi $n = 1$ obţinem

$$A = \frac{x_1 + 3x_0}{5}, \quad B = \frac{2x_0 - x_1}{5}$$

şi apoi prin inducţie demonstrăm propoziţia

$$P(n):\ x_n = \frac{x_1 + 3x_0}{5} \cdot 2^n + \frac{2x_0 - x_1}{5}(-3)^n$$

folosind $P(n-1) \wedge P(n) \ \Rightarrow\ P(n+1)$.

b) Pentru existenţa expresiei $f(f(x) - x)$, $f : (0, \infty)$, rezultă $f(x) > x$. Fie $g(x) = f(x) - x : (0, \infty) \to (0, \infty)$. Avem $f(x) = x + g(x)$ şi relaţia devine:

$$(*) \qquad g(g(x)) + g(x) = 6x,\ \forall\ x \in (0, \infty).$$

Considerăm şirul $(x_n)_n$ cu $x_0 = x \in (0, \infty)$ şi $x_{n+1} = g(x_n)$. Din $(*)$ rezultă că şirul $(x_n)_n$ verifică recurenţa de la punctul a), deci există $A(x)$ şi $B(x)$ astfel ca

$$x_n = A(x) \cdot 2^n + B(x)(-3)^n,\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ \forall\ x \in (0, \infty).$$

Din $g^n(x) = A(x) \cdot 2^n + B(x)(-3)^n > 0,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ rezultă $B(x) = 0,\ \forall\ x \in (0, \infty)$ şi atunci $g^n(x) = A(x) \cdot 2^n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ x \in (0, \infty)$.

Pentru $n = 0$ rezultă $x = A(x)$ şi pentru $n = 1$ rezultă

$$g(x) = 2A(x) = 2x,\ \forall\ x \in (0, \infty).$$

În concluzie singura funcţie care verifică condiţia de la b) este funcţia

$$f(x) = 3x,\ \forall\ x \in (0, \infty).$$

Problema 2 Clasa a XI-a

Pentru $a > 0$ definim şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ prin relaţia de recurenţă:

$$x_{n+1} = a + ax_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} + (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n+1})^2,\ \forall\ n \geq 2,$$

cu $x_1 = 1$ şi $x_2 = 1 + a$.

a) Să se arate că şirul verifică relaţiile de recurenţă P_n şi Q_n:

$$P_n : \quad x_n = a + x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1},\ \forall\ n \geq 2$$

$$Q_n : \quad x_{n+1} = x_n^2 - ax_n + a,\ \forall\ n \geq .$$

Să se arate că $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{x_k} < a(a+1),\ \forall\ n \geq 2.$

Vasile Pop

Soluţie. Inducţie.

$$P_2 : \quad x_2 = a + x_1 \ \Leftrightarrow\ 1 + a = 1 + a$$

$$P_{n+1} : \quad x_{n+1} = a + x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1}(a + x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1}) \stackrel{P_n}{=} a + x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1}x_n.$$

Din $P_n \ \Rightarrow\ x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} = x_n - a$ şi din

$$P_{n+1} : \quad x_{n+1} = a + (x_n - a)x_n = x_n^2 - ax_n + a.$$

b) Din $Q_n : \quad x_{n+1} - a = (x_n - a)x_n \ \Leftrightarrow\ \dfrac{1}{x_n(x_n-a)} = \dfrac{1}{x_{n+1}-a} \ \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{x_n - a} - \frac{1}{x_n} = \frac{a}{x_{n+1}-a} \ \Leftrightarrow\ \frac{a^n}{x_n - a} - \frac{a^{n+1}}{x_{n+1}-a} = \frac{a^n}{x_n}$$

Prin adunarea relaţiilor pentru $n = 2, 3, \ldots, n$ rezultă

$$\frac{a^2}{x_2 - a} - \frac{a^{n+1}}{x_{n+1}-a} = \sum_{k=2}^{n} \frac{a^k}{x_k} \ \Leftrightarrow\ a^2 - \frac{a^{n+1}}{x_{n+1}-a} = \sum_{k=2}^{n} \frac{a^k}{x_k} \ \Leftrightarrow$$

$$a^2 + a - \frac{a^{n+1}}{x_{n+1}-a} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{x_k}$$

Din P_n prin inducţie rezultă $x_n > 1$, $\forall\ n \geq 2$ şi apoi din

$$x_{n+1} - x_n = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1}(x_n - 1)$$

rezultă că şirul este crescător şi atunci $x_{n+1} - a > x_2 - a = 1 > 0$ deci

$$a^2 + a > \sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{x_k}.$$

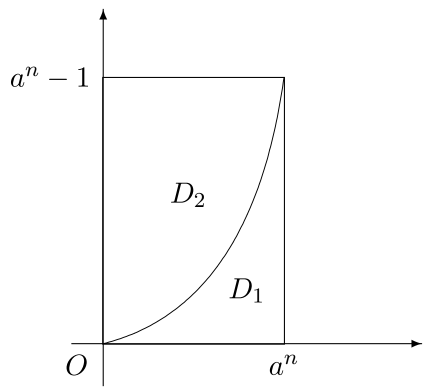
Problema 3 Clasa a X-a

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ un număr natural şi $a > 1$, un număr real cu proprietatea $a^k \notin \mathbb{N}$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ şi notăm $m = [a^n]$. Să se arate că:

$$\sum_{k=1}^{n}[a^k] + \sum_{k=1}^{m}[\log_a k] = m \cdot n.$$

Vasile Pop

Soluţie. Funcţia $f : (0, n] \to (0, a^n - 1]$, $f(x) = a^x - 1$ este bijectivă (crescătoare).



Numărul punctelor laticiale din dreptunghiul $(0, n] \times (0, a^n - 1]$ este

$$n[a^n - 1] = n([a^n] - 1) = nm - n = N.$$

Din condiţia $a^k \notin \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}^*$ rezultă că pe graficul funcţiei nu există puncte laticiale. Numărul punctelor laticiale din D, situate pe dreapta $x = k$ este

$$[a^k - 1] = [a^k] - 1.$$

Numărul punctelor laticiale din D_2 situate pe dreapta $y = p$ este $[\log_a(p+1)]$ $(a^x - 1 = y \ \Rightarrow \ x = \log_a(y+1))$.

Numărul punctelor laticiale din D_1 este

$$N_1 = \sum_{k=1}^{n}([a^k] - 1) = \sum_{k=1}^{n}[a^k] - n.$$

Numărul punctelor laticiale din D_2 este

$$N_2 = \sum_{p=1}^{m-1}[\log_a(p+1)] = \sum_{k=2}^{m}[\log_a k] = \sum_{k=1}^{m}[\log_a k].$$

Din $N = N_1 + N_2$ rezultă relaţia cerută.

Problema 4 Clasa a XI-a

Două din cele $(2n+1)^2$ pătrate ale unui foi de dimensiuni $(2n+1)\times(2n+1)$ se colorează cu roşu, celelalte rămân albe. Câte colorări distincte se pot face dacă colorările ce devin identice prin rotaţii ale foii se numără o singură dată?

Vasile Pop

Soluţie. Pentru o coală fixată avem $C^2_{(2n+1)^2}$ moduri de colorare (alegerea a două pătrate roşii din cele $(2n+1)^2$ pătrate). O colorare în care pătratele roşii sunt diametral opuse faţă de pătratul din mijloc se numără de două ori (după o rotaţie cu 180° colorarea este aceeaşi). Celelalte colorări se numără de câte patru ori (după rotaţiile de 90°, 180°, 270°). Numărul colorărilor simetrice este

$$\frac{(2n+1)^2-1}{2}=2(n^2+n).$$

Obţinem numărul căutat:

$$N=\frac{2(n^2+n)}{2}+\frac{C^2_{(2n+1)^2}-2(n^2+n)}{4}=(n^2+n)(2n^2+2n+1).$$

Concursul interjudeţean de matematică ”Alexandru Papiu Ilarian”
Ediţia a XIII-a, Târgu-Mureş, 2008
Clasa a XII-a

1. Fie $A = [a_{ij}]_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ o matrice cu elementele numere pozitive. Numim ”transformare” înlocuirea tuturor elementelor de pe o linie sau de pe o coloană cu inversele lor.

Să se arate că putem efectua o succesiune de ”transformări” care modifică matricea A în matricea B cu proprietatea că produsul tuturor elementelor de pe fiecare linie şi de pe fiecare coloană este cel puţin 1.

2. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice cu proprietatea

$$S(A) = S(A^2) = \cdots = S(A^n) = 0,$$

unde $S(A^k)$ este suma tuturor elementelor matricei A^k, $k = \overline{1,n}$.

Să se arate că:

a) Determinantul matricei A este egal cu zero.

b) $S(A^k) = 0$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se dea exemplu de matrice nenulă A cu proprietatea din enunţ.

3. Pentru $a > 0$ definim şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ prin relaţia de recurenţă:

$$x_{n+1} = a + ax_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot_{n-1} + (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1})^2,\ \forall\ n \geq 2,$$

cu $x_1 = 1$, $x_2 = 1 + a$.

a) Să se arate că $x_{n+1} = x_n^2 - ax_n + a$, $\forall\ n \geq 2$.

b) Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{x_k} = a(a+1).$$

4. Fie $a \in (0,1)$ un număr real şi $a = 0, a_1 \cdot a_2 \ldots a_n \ldots$, cu $a_1, a_2, \ldots, a_n, \cdots \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ reprezentarea sa zecimală.

a) Să se arate că pentru orice $x \in (0,1)$ există şi este finită limita:

$$\lim_{n\to\infty} (a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n).$$

b) Dacă notăm $f_a(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)$, $x \in (0,1)$, să se arate că funcţia $f_a : (0,1) \to \mathbb{R}$ este funcţie raţională dacă şi numai dacă numărul a este număr raţional. (Funcţia f_a este raţională dacă $f_a(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, cu $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$).

Problema 1 Clasa a XII-a

Fie $A = [a_{ij}]_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ o matrice cu elementele numere pozitive. Numim "transformare" înlocuirea tuturor elementelor de pe o linie sau de pe o coloană cu inversele lor.

Să se arate că putem efectua o succesiune de "transformări" care modifică matricea A în matricea B cu proprietatea că produsul tuturor elementelor de pe fiecare linie şi de pe fiecare coloană este cel puţin 1.

Vasile Pop

Soluţie. Dacă C este o matrice obţinută prin transformări din A atunci $c_{ij} = a_{ij}$ sau $c_{ij} = \dfrac{1}{a_{ij}}$, deci numărul matricelor ce pot fi obţinute din A este finit (maxim $2^{m \cdot n}$). Fie B matricea pentru care produsul tuturor elementelor este maxim (dintre toate matricele obţinute prin transformări succesive din A). Arătăm că B are proprietatea cerută. Dacă de exemplu, prin absurd ar exista o linie sau coloană cu produsul elementelor mai mic ca 1, facem în ea transformarea care inversează elementele acestei linii sau coloane şi obţinem o matrice B_1 în care produsul elementelor este strict mai mare (contradicţie cu alegerea matricei B).

Problema 2 Clasa a XII-a

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice cu proprietatea

$$S(A) = S(A^2) = \cdots = S(A^n) = 0,$$

unde $S(A^k)$ este suma tuturor elementelor matricei A^k, $k = \overline{1, n}$.

Să se arate că:

a) Determinantul matricei A este egal cu zero.

b) $S(A^k) = 0$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se dea exemplu de matrice nenulă A cu proprietatea din enunţ.

Vasile Pop

Soluţie. Din teorema Cayley-Hamilton scriem relaţia

$$A^n - \sigma_1 A^{n-1} + \sigma_2 A^{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1} A + (-1)^n \det A \cdot I_n = 0 \tag{1}$$

a) Aplicăm în (2) funcţia S şi obţinem

$$S(A^n) - \sigma_1 S(A^{n-1}) + \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1} S(A) + (-1)^n \det A \cdot n = 0$$

şi din ipoteză rezultă $\det A = 0$.

b) Înmulţim în (1) cu A şi apoi aplicăm S, obţinem $S(A^{n+1}) = 0$.

Înmulţim în (1) cu A^2 şi apoi aplicăm S, obţinem $S(A^{n+2}) = 0$.

Prin inducţie rezultă $S(A^{n+k}) = 0$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$.

c) Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ cu $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ şi

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \neq 0.$$

Definim $A = X \cdot X^t$ şi avem

$$S(A) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 = 0$$

$$A^2 = X \cdot X^t \cdot X \cdot X^t = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \cdot A \text{ deci } S(A^2) = 0$$

$$A^k = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{k-1} \cdot A \text{ deci } S(A^k) = 0,\ k \in \mathbb{N}^*.$$

Problema 3 Clasa a XII-a

Pentru $a > 0$ definim şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ prin relaţia de recurenţă:

$$x_{n+1} = a + ax_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot_{n-1} + (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1})^2, \ \forall\ n \geq 2,$$

cu $x_1 = 1$, $x_2 = 1 + a$.

a) Să se arate că $x_{n+1} = x_n^2 - ax_n + a$, $\forall\ n \geq 2$.

b) Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{x_k} = a(a+1).$$

Vasile Pop

Soluţie. a) Prin inducţie din exprimarea

$$x_{n+1} = a + x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1}(a + x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1}),$$

demonstrăm recurenţa

$$P_n : \quad x_n = a + x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1}, \ \forall\ n \geq 2$$

şi apoi din $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} = x_n - a$ şi din P_{n+1} rezultă

$$x_{n+1} = a + (x_n - a)x_n = x_n^2 - ax_n + a.$$

b) Din $x_{n+1} - a = (x_n - a)x_n$ rezultă

$$\frac{1}{(x_n - a)x_n} = \frac{1}{x_{n+1} - a} \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{x_n - a} - \frac{1}{x_n} = \frac{a}{x_{n+1} - a} \ \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{x_n - a} - \frac{a}{x_{n+1} - a} = \frac{1}{x_n} \ \Rightarrow\ \frac{a^n}{x_n - a} - \frac{a^{n+1}}{x_{n+1} - a} = \frac{a^n}{x_n}$$

Adunăm relaţiile pentru $n : 2, 3, \ldots, n$ şi obţinem:

$$\frac{a^2}{x_2 - a} - \frac{a^{n+1}}{x_{n+1} - a} = \sum_{k=2}^{n} \frac{a^k}{x_k} \ \Leftrightarrow\ a^2 - \frac{a^{n+1}}{x_{n+1} - a} = \sum_{k=2}^{n} \frac{a^k}{x_k}$$

sau

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{x_k} = a^2 + a - \frac{a^{n+1}}{x_{n+1} - a}$$

Din $x_{n+1} > ax_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1}$ prin inducţie, rezultă că $x_n > a^{2^{n-2}}$, $\forall\ n \geq 2$ şi atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}}{x_{n+1} - a} = 0,$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{x_k} = a^2 + a.$$

Problema 4 Clasa a XII-a

Fie $a \in (0,1)$ un număr real şi $a = 0, a_1 \cdot a_2 \ldots a_n \ldots$, cu $a_1, a_2, \ldots, a_n, \cdots \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ reprezentarea sa zecimală.

a) Să se arate că pentru orice $x \in (0,1)$ există şi este finită limita:

$$\lim_{n\to\infty}(a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n).$$

b) Dacă notăm $f_a(x) = \lim_{n\to\infty}(a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n)$, $x \in (0,1)$, să se arate că funcţia $f_a : (0,1) \to \mathbb{R}$ este funcţie raţională dacă şi numai dacă numărul a este număr raţional. (Funcţia f_a este raţională dacă $f_a(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, cu $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$).

Vasile Pop

Soluţie. a) Pentru orice $x \in (0,1)$ şirul $A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$ este crescător, mărginit inferior de 0 şi

$$A_n(x) \leq 9\sum_{k=1}^{n} x^k = 9x\frac{1-x^n}{1-x} \leq \frac{9x}{1-x},$$

deci el este mărginit şi superior. Rezultă că există $\lim_{n\to\infty} A_n(x) \leq \dfrac{9x}{1-x}$ pentru orice $x \in (0,1)$.

b) Numărul a este raţional dacă şi numai dacă şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este şir periodic. Dacă $a_n = a_{n+p}$, pentru orice $n > n_0$ atunci:

$$A_{n_0+np}(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n_0} x^{n_0} + x^{n_0} R(x) + n^{n_0+p} R(x) + \cdots +$$

$$+x^{n_0+(n-1)p} R(x)$$

$$= S(x) + x^{n_0} R(x)\frac{1-x^{np}}{1-x^p},$$

unde

$$R(x) = a_{n_0+1} x + a_{n_0+2} x^2 + \cdots + a_{n_0+p} x^p \in \mathbb{Z}[X].$$

Conform lui a) putem trece la limită cu $n \to \infty$ şi obţinem:

$$f_a(x) = S(x) + \frac{x^{n_0} R(x)}{1-x^p} = \frac{P(x)}{Q(x)}, \text{ cu } P, Q \in \mathbb{Z}[X],$$

deci f_a este funcţie raţională.

Invers: dacă $f_a : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $x \in (0,1)$ cu $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$ atunci $f_a\left(\dfrac{1}{10}\right) = \dfrac{P\left(\frac{1}{10}\right)}{Q\left(\frac{1}{10}\right)} \in \mathbb{Q}$, dar $f_a\left(\dfrac{1}{10}\right) = a$, deci $a \in \mathbb{Q}$.